

SHU(MRU) 物理学院-每日一题 9

Prof. Shu

2023 年 7 月 13 日

题目 9.

一个理想的自由回转仪, 即一个有旋转对称性的刚体 (主转动惯量为 $I_1 = I_2 < I_3$), 能围绕它的质心自由地转动, 运动时不受到力矩作用. 设 $\mathbf{u}(t)$ 是 t 时刻沿刚体的对称轴 (与转动惯量 I_3 相联系的轴) 的单位矢量.

导出用 $t = 0$ 时的 $\mathbf{u}(0)$ 和初角速度 $\boldsymbol{\omega}(0)$ 表达的 $\mathbf{J}(t)$ (关于质心的角动量), $\boldsymbol{\omega}(t)$ 和 $\mathbf{u}(t)$ 的表达式.

题目 8 的参考答案.

由费马原理可知光程相等

$$L = nx + \sqrt{(f-x)^2 + y^2} = \sqrt{f^2 + R^2}, \quad (1)$$

整理可得:

$$(n^2 - 1) \left[x - \frac{n\sqrt{f^2 + R^2} - f}{n^2 - 1} \right]^2 - y^2 = \frac{(nf - \sqrt{f^2 + R^2})^2}{n^2 - 1}. \quad (2)$$

令

$$x_0 = \frac{n\sqrt{f^2 + R^2} - f}{n^2 - 1}, \quad a = \frac{nf - \sqrt{f^2 + R^2}}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

则 (2) 可简化为

$$(n^2 - 1)(x - x_0)^2 - y^2 = a^2. \quad (3)$$

可以看出透镜的凸面形状是旋转双曲面.

设透镜顶点 A 点与 O 点相距 x_A , 则有

$$(n^2 - 1)(x_A - x_0)^2 = a^2, \quad (4)$$

解得

$$x_A = \frac{\sqrt{f^2 + R^2} + f}{n + 1}. \quad (5)$$

因

$$x_A \leq f,$$

于是

$$R \leq \sqrt{n^2 - 1}f. \quad (6)$$